

ΘΕΜΑ 6

ΦΥΛΟ #1

α) Να βρεθεί $(1147, 851)$

β) Να βρεθούν τα $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$ ώστε:

$$112x + 96y + 24z = 8$$

γ) Εάν $(a, b) = 1$ τότε $(2a+b, a+2b) = 1$ ή 3

δ) ΝΑΟ $30 \mid n^5 - n, \forall n \in \mathbb{N}$

ε) Εάν $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$, τότε νδσ $[a, b, c] = [[a, b], [a, c]]$

στ) Εάν $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, τότε νδσ $(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)]$

ΜΕΤ

α) Βάση του Ευκλείδειου αλγορίθμου, έχουμε:

$$1147 = 1 \cdot 851 + 296$$

$$851 = 2 \cdot 296 + 259$$

$$296 = 1 \cdot 259 + \boxed{37}$$

$$259 = 7 \cdot 37 + 0$$

$$37 = 296 - 1 \cdot 259 =$$

$$= 296 - (851 - 2 \cdot 296) =$$

$$= 3 \cdot 296 - 851 =$$

$$= 3(1147 - 851) - 851 =$$

$$= 3 \cdot 1147 + (-4) \cdot 851$$

Επομένως, $(1147, 851) = (31 \cdot 37, 23 \cdot 37) = 37$

β) Προφανώς, $(112, 96, 24) = 8 \Rightarrow (112, (96, 24)) = 8$

$$112x + 96y + 24z = 8$$

Πρόκειται για το θεωρήμα Bezout

Έχουμε ότι:

$$96 = 4 \cdot 24 + 0 \quad \text{και} \quad 112 = 4 \cdot 24 + 16$$

$$\text{Άρα, } (96, 24) = 24$$

$$24 = 1 \cdot 16 + \boxed{8}$$

$$16 = 2 \cdot 8 + 0$$

$$\bullet 8 = 24 - 1 \cdot 16 = 24 - 1 \cdot (112 - 4 \cdot 24) =$$

$$= 24 - 112 + 4 \cdot 24 = 1 \cdot 24 + (-1) \cdot 112 + 1 \cdot 96$$

Άρα, $x = -1, y = 1$ και $z = 1$.

γ) $(2a+b, a+2b) = d$

$$\begin{cases} d \mid (2a+b) \\ d \mid (a+2b) \end{cases} \Rightarrow d \mid [(2a+b) - (a+2b)] \Rightarrow d \mid (a-b)$$

Άρα, $\begin{cases} d \mid (a-b) \\ d \mid (2a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid [(a-b) + (2a+b)] = 3a \\ \text{και} \\ d \mid [(a+2b) - (a-b)] = 3b \end{cases}$

$$\Rightarrow d \mid (3a, 3b) = 3(a, b) = 3 \Rightarrow d=1 \text{ ή } d=3$$

δ) • για $m=0$ (δυν. $P(0)$ προτασική αληθής)

$$30 \mid 0^3 - 0 \Rightarrow 30 \mid 0 \text{ τωχία.}$$

• Έστω ότι τωχίει για $m=k$ και θα δούμε τωχίει και για $m=k+1$. (δυν. έστω $P(k)$ αληθής $\Rightarrow P(k+1)$ αληθής)

$$\text{Αρα, τωχίει } 30 \mid k^3 - k.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - k &= (k+1)^2(k+1) - k = \\ &= (k^2 + 2k + 1)(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k = \\ &= k^5 + 3k^4 + 3k^3 + k^2 + 2k^4 + 6k^3 + 6k^2 + 2k + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k = \\ &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k - k = \\ &= \underbrace{k^5 - k}_{30 \mid k^5 - k} + 5k \underbrace{(k^3 + 2k^2 + 2k + 1)}_{\ell = (k+1)(k^2 + k + 1)} \end{aligned}$$

Αρκεί το $6 \mid k \cdot \ell$

~ Εάν $2 \nmid k \Rightarrow k$ περιττός $\Rightarrow k+1$ άρτιος $\Rightarrow 2 \mid \ell$

~ Εάν $2 \mid k$ τότε όμοια... $3 \mid \ell \Rightarrow 6 \mid k$

~ Εάν $3 \mid k$ τότε όμοια... $2 \mid \ell \Rightarrow 6 \mid k$

~ κλπ...

$$\epsilon) \text{ Ας είναι } \left. \begin{aligned} a &= p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \\ b &= p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} \\ \gamma &= p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &1 < p_1 < \dots < p_r, \text{ πρώτοι} \\ &0 \leq m_i, k_i, n_i \text{ φυσικοί} \end{aligned}$$

$$[a, b, \gamma] = p_1^{\max(k_1, m_1, n_1)} \dots p_r^{\max(k_r, m_r, n_r)}$$

$$\text{Αλλά, } [a, b] = p_1^{\max(k_1, m_1)} \dots p_r^{\max(k_r, m_r)}$$

$$[a, \gamma] = p_1^{\max(k_1, n_1)} \dots p_r^{\max(k_r, n_r)}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως,} \\ [[a, b], [a, \gamma]] &= p_1^{\max(\max(k_1, m_1), \max(k_1, n_1))} \dots p_r^{\max(\max(k_r, m_r), \max(k_r, n_r))} \\ &= p_1^{\max(k_1, m_1, n_1)} \dots p_r^{\max(k_r, m_r, n_r)}. \end{aligned}$$

$$\text{στ) Έστω } \left. \begin{aligned} \alpha &= p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \\ \beta &= p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} \\ \gamma &= p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &1 \leq p_1 < \dots < p_r, \text{ πρώτοι} \\ &0 \leq k_i, m_i, n_i \text{ φυσικοί} \end{aligned}$$

$$[\beta, \gamma] = p_1^{\max(m_1, n_1)} \dots p_r^{\max(m_r, n_r)}$$

$$(\alpha, [\beta, \gamma]) = p_1^{\min(k_1, \max(m_1, n_1))} \dots p_r^{\min(k_r, \max(m_r, n_r))}$$

$$(\alpha, \beta) = p_1^{\min(k_1, m_1)} \dots p_r^{\min(k_r, m_r)}$$

$$[(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma)] = p_1^{\max(\min(k_1, m_1), \min(k_1, n_1))} \dots p_r^{\max(\min(k_r, m_r), \min(k_r, n_r))}$$

Αρκεί, $\min(k_i, \max(m_i, n_i)) = \max(\min(k_i, m_i), \min(k_i, n_i))$
 Περίπτωσης

$$1) \quad k_i \leq m_i \leq n_i \begin{cases} \rightarrow \min(k_i, \max(m_i, n_i)) = \min(k_i, n_i) = k_i \\ \rightarrow \max(\min(k_i, m_i), \min(k_i, n_i)) = \max(k_i, k_i) = k_i \end{cases}$$

$$2) \quad k_i \leq n_i \leq m_i \rightarrow \text{ομοίως}$$

$$3) \quad m_i \leq k_i \leq n_i \begin{cases} \rightarrow \min(k_i, \max(m_i, n_i)) = \min(k_i, n_i) = k_i \\ \rightarrow \max(\min(k_i, m_i), \min(k_i, n_i)) = \max(m_i, k_i) = k_i \end{cases}$$

$$4) \quad m_i \leq m_i \leq k_i$$

$$5) \quad m_i \leq m_i \leq k_i$$

$$6) \quad m_i \leq k_i \leq m_i$$

ομοίως

ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ #2

1) Αφαιρείται λόγω ευκολίας.

2) • $(a, 700) = 1 \Rightarrow (a, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7) = 1$

$$a = 3^{k_1} \cdot 11^k \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$$

$$0 \leq k_i$$

$$11 < p_3 < p_4 < \dots < p_r \text{ πρώτοι}$$

$$r = 0, 1, 2, \dots$$

$$(\text{για } r=0 \rightarrow a=1)$$

• $(b, 700) = 5 \Rightarrow (b, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7) = 5$

$$b = 3^{k_1} \cdot 11^{k_2} \cdot p_2^{k_3} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$$

$$0 \leq k_i$$

$$11 < p_2 < \dots < p_r \text{ πρώτοι}$$

$$\text{Ευχ. } b = 5 \cdot 9$$

• $[c, 700] = [c, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7] = 7 \cdot 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

$$c = 2^{\varepsilon_1} \cdot 5^{\varepsilon_2} \cdot 7^{\varepsilon_3} \cdot 11, \text{ where } 0 \leq \varepsilon_1 \leq 2, 0 \leq \varepsilon_2 \leq 2$$

$$\text{και } 0 \leq \varepsilon_3 \leq 1$$

• $(d, 700) = 5$ και $[d, 700] = 23100$

$$(d, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7) = 5 \text{ και } [d, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7] = 23100$$

$$\Rightarrow d = 3^{k_0} \cdot 5 \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}, \quad 11 \leq p_1 < \dots < p_r \text{ πρώτοι}$$

$$0 \leq k_i \text{ και } 0 \leq k_0$$

$$[d, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7] = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$\Rightarrow d = 2^{\varepsilon_1} \cdot 3 \cdot 5^{\varepsilon_3} \cdot 7^{\varepsilon_4} \cdot 11, \quad 0 \leq \varepsilon_1 \leq 2, 0 \leq \varepsilon_3 \leq 1$$

$$0 \leq \varepsilon_4 \leq 1$$

Συνεχίζω για το d που έχω:

Αρα, προκύπτει ότι $d = 3 \cdot 5 \cdot 11$

Μ μέσω του ζυγού $\frac{d \cdot 700}{(d, 700)} = 23100 \Rightarrow d = \frac{5}{7} \cdot 231 = \dots$

Εστω ότι $\exists p$ πρώτος ώστε

$$p \mid a^2 + b^2, a+b \text{ και } p > 2$$

$$\left. \begin{array}{l} p \mid (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ p \mid a^2 + b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow p \mid 2ab \left. \begin{array}{l} p > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow p \mid ab$$

Αρα, $p \mid ab$ και p πρώτος $\Rightarrow p \mid a$ ή $p \mid b$

Αλλά ο p δεν μπορεί να διαιρεί και τους δύο γιατί τότε ο p θα διαιρεί το $(a, b) = 1$

• Εστω $p \mid a$ και $p \nmid b$. Επίσης $p \mid a+b \Rightarrow$

$$\Rightarrow p \mid a+b-a=b. \text{ Αρα } p \nmid b \text{ και } p \mid b \text{ Απονο}$$

μα δεν υπάρχει πρώτος > 2 ώστε $p \mid (a^2 + b^2, a+b)$.
Πρέπει επίσης να μην έχουμε, ότι:

$$2^k \mid (a^2 + b^2, a+b) \quad \forall k > 1$$

Υποθέτουμε ότι $4 \mid (a^2 + b^2, a+b)$

$$4 \mid a^2 + b^2 \text{ και } 4 \mid a+b \Rightarrow 4 \mid a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \mid a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 = 2ab$$

$$4 \mid 2ab \Rightarrow 2 \mid ab. \text{ Αρα, } 2 \mid a \text{ ή } 2 \mid b$$

Είχαμε να τους διαιρεί και τους 2

$$\text{Αν } 2 \mid a, \text{ τότε ότι } 2 \mid a+b \Rightarrow 2 \mid b \text{ Απονο}$$

Οι υποθέσεις στο επόμενο μαθημα!!!